

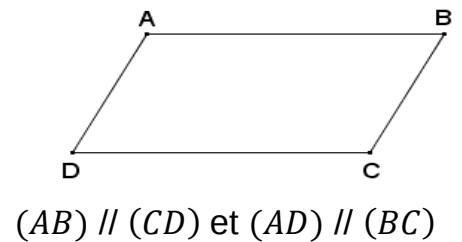
1. Cours à travailler (se trouve sur les pages suivantes) :
 - Chapitre 14 : Les parallélogrammes
 - III. Propriétés des parallélogrammes
 - 5. Propriétés des quadrilatères particuliers (relire le grand tableau)
 - 6. Construction d'un parallélogramme
2. Exercices à effectuer avant le prochain cours de maths (le corrigé est dans le fichier de ce cours) :
 - Faire le maximum d'exercices de la colonne de gauche (pour ceux qui ont du mal à construire des figures géométriques) ou de la colonne de droite (pour les autres élèves)

5^{ème} - Chapitre 14 : Les parallélogrammes

I. Définition :

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

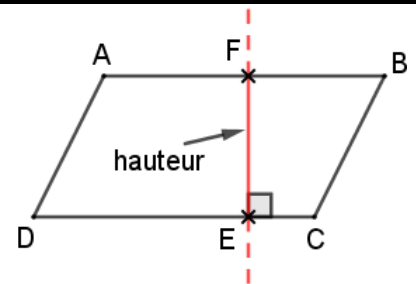


II. Aire d'un parallélogramme :

Définition :

Soient $ABCD$ un parallélogramme et une droite perpendiculaire à (CD) .

On note E et F les deux points d'intersection de cette droite avec (AB) et (CD)



On dit alors que le segment $[EF]$ est une **hauteur** du parallélogramme.

Vocabulaire à connaître :

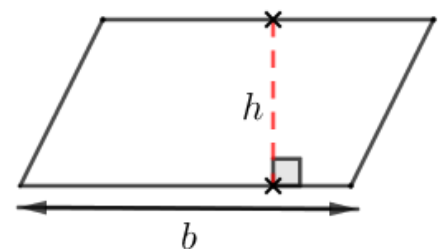
- On dit que la hauteur $[EF]$ est relative au côté $[CD]$. Dans ce cas, on dit que $[CD]$ est la base.
- La longueur du segment $[EF]$ est aussi appelée hauteur.

Aire d'un parallélogramme :

On considère un parallélogramme de hauteur h et dont la longueur de la base associée est notée b .

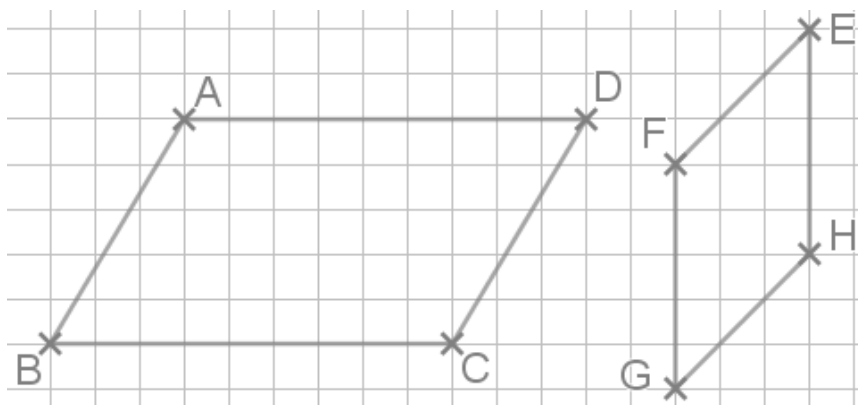
L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{A} = b \times h$$



Exemples :

Le quadrillage ci-dessous est constitué de carrés de 1 cm de côté.



.....

.....

.....

III. Propriétés du parallélogramme :

1. Les diagonales :

Propriété n°1 :

SI un quadrilatère est un parallélogramme, **ALORS** ses diagonales se coupent en leur milieu.

Démonstration de la propriété n°1 :

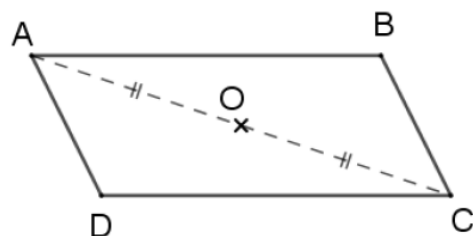
On considère un parallélogramme ABCD et on note O le milieu de la diagonale [AC].

Démontrons que les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, autrement dit que O est le milieu de [BD], autrement dit que B est le symétrique de D par rapport à O.

Dans toute la démonstration, on utilisera la symétrie de centre O.

Démontrons d'abord que la droite (BC) est le symétrique de la droite (AD).

- Je sais que :
 - C est le symétrique de A car O est le milieu de [AC].
 - (BC) // (AD) car ABCD est un parallélogramme.



- Or, le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle.
(propriété n°2 du chapitre 4 sur la symétrie centrale)
- J'en déduis que le symétrique de la droite (AD) est la droite parallèle à (AD) et passant par C (le symétrique de A).
Donc la droite (BC) est le symétrique de la droite (AD).

De même on pourrait démontrer que la droite (AB) est le symétrique de la droite (DC).

En conclusion :

Le point D étant l'intersection de (AD) et (DC), son symétrique est donc l'intersection de (BC) et (AB), c'est-à-dire le point B .

Remarque :

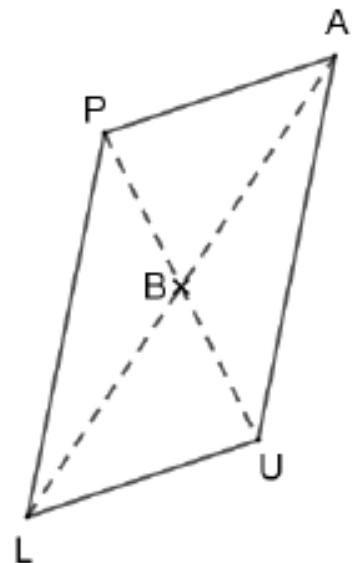
- Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est donc le centre de symétrie du parallélogramme .
- Dans un parallélogramme, les diagonales n'ont pas toujours la même longueur et ne sont pas toujours perpendiculaires.

Exercice :

On considère le parallélogramme PAUL dont les diagonales se coupent en B et tel que :

$PA = 3 \text{ cm}$; $PL = 5 \text{ cm}$; $AL = 7 \text{ cm}$

Quelle est la longueur du segment [AB] ?



- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé**

Je sais que :

-
-

- **2^{ème} étape : Je cite le cours**

.....

.....

- **3^{ème} étape : Je conclus à la question**

J'en déduis que :

2. Les côtés opposés :

Propriété n°2 :

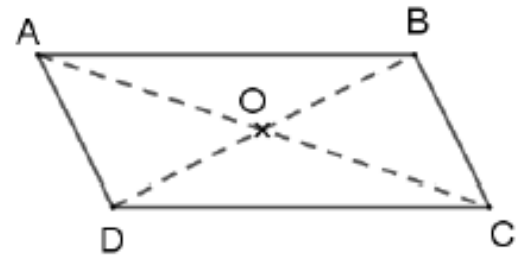
SI un quadrilatère est un parallélogramme, **ALORS** ses côtés opposés ont la même longueur.

Démonstration de la propriété n°2 :

On considère un parallélogramme $ABCD$ et on note O l'intersection de ses diagonales.

Démontrons que $AB=DC$ et $AD=BC$.

Dans toute la démonstration, on parlera de la symétrie de centre O .



Démontrons d'abord que C est le symétrique de A et que D est le symétrique de B .

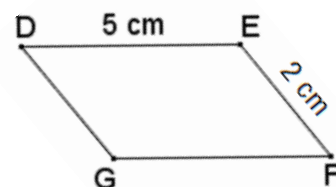
- Je sais que :
 - $ABCD$ est un parallélogramme
 - O est l'intersection des diagonales de $ABCD$
- Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
- J'en déduis que O est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$ et donc que C est le symétrique de A et que D est le symétrique de B .

Démontrons ensuite que $AB=DC$ et $AD=BC$.

- Je sais que :
 - $[DC]$ est le symétrique de $[AB]$
 - $[BC]$ est le symétrique de $[AD]$
- Or, le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur (propriété n°1 du chapitre 4 sur la symétrie centrale)
- J'en déduis que $AB=DC$ et $AD=BC$.

Exemple :

On considère le parallélogramme $DEFG$ ci-contre. Déterminer la longueur du segment $[FG]$.



- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé**

Je sais que :

-
-

- **2^{ème} étape : Je cite le cours**

.....
.....

- **3^{ème} étape : Je conclus à la question**

Donc, j'en déduis que :

3. Les angles :

Propriété n°3 :

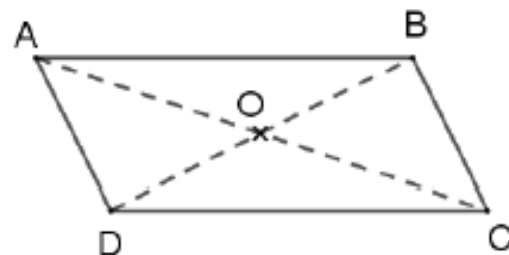
Si un quadrilatère est un parallélogramme, **ALORS** ses angles opposés ont la même mesure.

Démonstration de la propriété n°2 :

On considère un parallélogramme $ABCD$ et on note O l'intersection de ses diagonales.

Démontrons que $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$.

Dans toute la démonstration, on parlera de la symétrie de centre O .



- Je sais que :
 - D est le symétrique de B et A est le symétrique de C (voir la démonstration précédente) donc l'angle $\widehat{DAB}$ est le symétrique de l'angle $\widehat{BCD}$.
 - l'angle $\widehat{ADC}$ est le symétrique de l'angle $\widehat{CBA}$ pour les mêmes raisons
- Or, la symétrie centrale conserve les mesures des angles.
(propriété n°4 du chapitre 4 sur la symétrie centrale)
- J'en déduis que : $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$.

4. Bilan de ce qu'il faut retenir sur les parallélogrammes :

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Propriété bilan :

SI un quadrilatère est un parallélogramme, **ALORS** :

- ses **diagonales** se coupent en leur milieu
- ses **côtés opposés** ont la même longueur
- ses **angles opposés** ont la même mesure

5. Propriétés sur les quadrilatères particuliers :

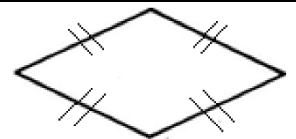
Définition du rectangle :

Un rectangle est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.



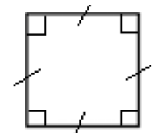
Définition du losange:

Un losange est un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur.



Définition du carré:

Un carré est un quadrilatère qui possède quatre angles droits et quatre côtés de même longueur



Remarques :

- On sait depuis la 6^{ème} que les côtés opposés d'un rectangle et d'un carré sont parallèles.

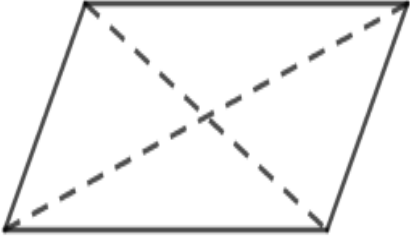
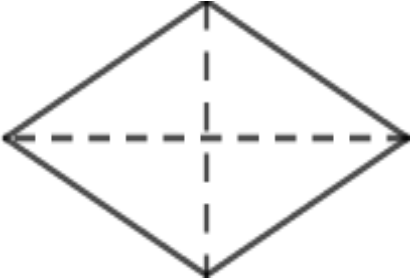
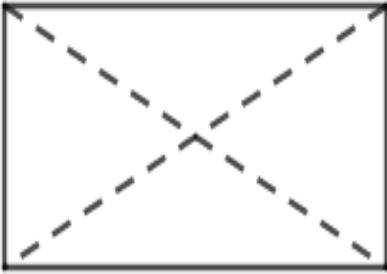
En effet, pour le prouver, il suffit d'utiliser la propriété suivante :

« Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors ces deux droites sont parallèles ».

Grâce à la partie suivante, nous verrons que les côtés opposés d'un losange sont également parallèles.

- Grâce à la remarque précédente, on peut alors dire que le rectangle, le carré et le losange sont des parallélogrammes.

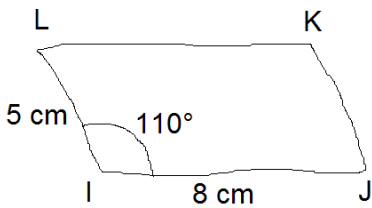
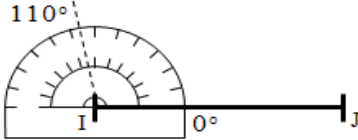
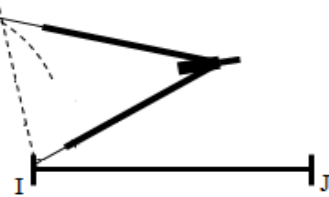
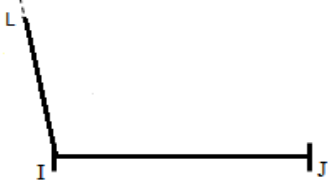
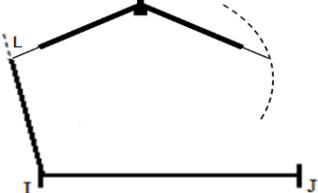
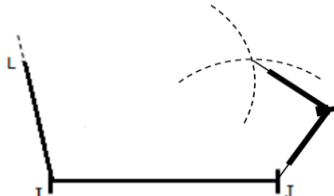
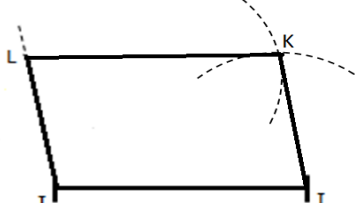
Ces trois quadrilatères possèdent donc toutes les propriétés du parallélogramme.

	SI UN QUADRILATERE EST UN			
	un parallélogramme	un losange	un rectangle	un carré
	ALORS			
ses côtés opposés sont parallèles	X	X	X	X
ses côtés opposés ont la même longueur	X	X	X	X
ses diagonales se coupent en leur milieu	X	X	X	X
ses angles opposés ont la même mesure	X	X	X	X
ses diagonales sont perpendiculaires		X		X
ses diagonales ont la même longueur			X	X
ses quatre côtés ont la même longueur		X		X
ses quatre angles sont des angles droits			X	X
				

6. Construction d'un parallélogramme :

Exemple :

On veut construire le parallélogramme $IJKL$ tel que $IJ = 8\text{ cm}$, $IL = 5\text{ cm}$ et $\widehat{JIL} = 110^\circ$.

<u>1^{ère} étape :</u> On commence par tracer une figure à main levée en indiquant les données du problème sans oublier les codages et en respectant la nature des angles (aigus ou obtus).	
<u>2^{ème} étape :</u> On débute la construction en traçant un des côtés du parallélogramme (il est préférable de commencer par le plus grand côté). On trace donc le côté $[IJ]$ de 8 cm.	
<u>3^{ème} étape :</u> On construit ensuite au rapporteur l'angle $\widehat{JIL}$ de 110°, de sommet I et dont l'un des côtés est la demi-droite $[IJ]$.	
<u>4^{ème} étape :</u> Comme le côté $[IL]$ mesure 5 cm, on trace donc un arc de cercle de centre I et de rayon 5 cm.	
<u>5^{ème} étape :</u> L'intersection de l'arc de cercle et de la demi-droite donne le point L.	
<u>6^{ème} étape :</u> Comme le côté $[KL]$ mesure 8 cm, on trace donc un arc de cercle de centre L et de rayon 8 cm.	
<u>7^{ème} étape :</u> Comme le côté $[JK]$ mesure 5 cm, on trace donc un arc de cercle de centre J et de rayon 5 cm.	
<u>8^{ème} étape :</u> L'intersection des deux arcs de cercle en pointillés donne le point K. Il ne reste plus qu'à tracer les côtés $[JK]$ et $[KL]$.	

IV. Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme :

1. Les diagonales :

Propriété n°4 :

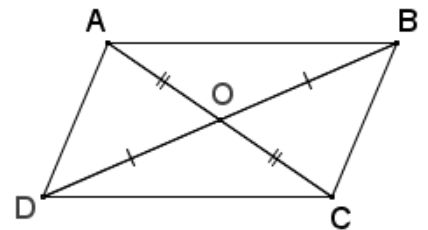
SI un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, **ALORS** c'est un parallélogramme.

Démonstration de la propriété n°4 :

On considère un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales ont le même milieu, noté O .

Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme, autrement dit que ses côtés opposés sont parallèles.

Dans toute la démonstration, on utilisera la symétrie de centre O .



Démontrons que : $(CD) \parallel (AB)$ et $(AD) \parallel (BC)$

- Je sais que :
 - C est le symétrique de A et D est le symétrique de B (car O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$) donc la droite (CD) est le symétrique de la droite (AB)
 - pour les mêmes raisons, la droite (AD) est le symétrique de la droite (BC)
- Or, le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle.
(propriété n°2 du chapitre 4 sur la symétrie centrale)
- J'en déduis que : $(CD) \parallel (AB)$ et $(AD) \parallel (BC)$

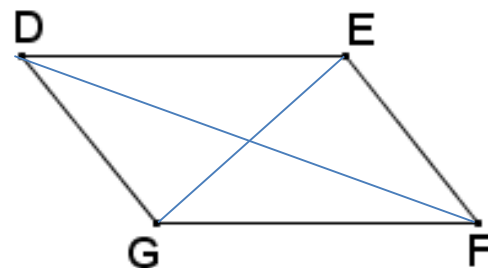
2. Les côtés opposés :

Propriété n°5 (admise) :

SI un quadrilatère a ses côtes opposés de même longueur, **ALORS** c'est un parallélogramme.

Exercice :

On considère un quadrilatère $DEFG$ tel que
 $DE = 6\text{ cm}$, $FG = 6\text{ cm}$, $DG = 4\text{ cm}$, $EF = 4\text{ cm}$, $DF = 5\text{ cm}$.
Montrer que $DEFG$ est un parallélogramme.



- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé**

Je sais que :

-
-
-

- **2^{ème} étape : Je cite le cours**

.....
.....

- **3^{ème} étape : Je conclus à la question**

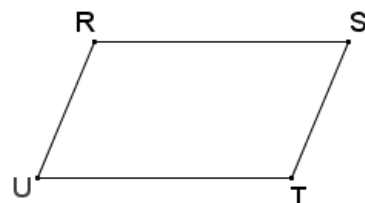
J'en déduis que $DEFG$ est un parallélogramme.

Propriété n°6 (admise) :

Si un quadrilatère a **DEUX** côtés opposés parallèles et de même longueur, **ALORS** c'est un parallélogramme.

Exercice :

On considère un quadrilatère $RSTU$ tel que $TU = 3\text{ cm}$,
 $RS = 3\text{ cm}$. On suppose que les droites (TU) et (RS) sont parallèles.
Montrer que $RSTU$ est un parallélogramme.



- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé**

Je sais que :

-
-
-

- **2^{ème} étape : Je cite le cours**

.....
.....

- **3^{ème} étape : Je conclus à la question**

J'en déduis que $RSTU$ est un parallélogramme.

3. Bilan de ce qu'il faut retenir pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme :

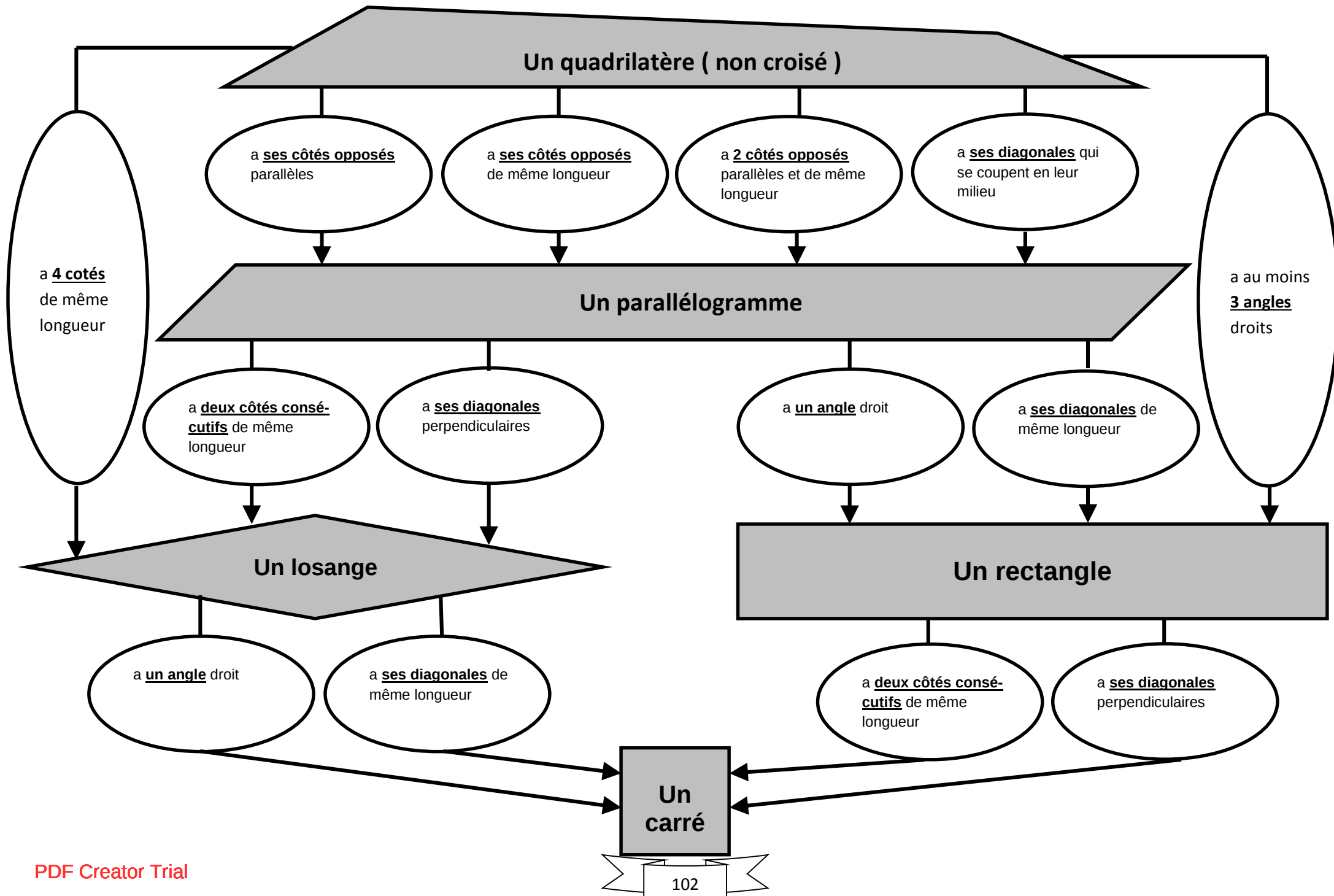
Propriété bilan :

Si un quadrilatère non croisé a :

- soit ses **diagonales** qui se coupent en leur milieu
- soit ses **côtés opposés** de même longueur
- soit **DEUX** côtés opposés parallèles et de même longueur

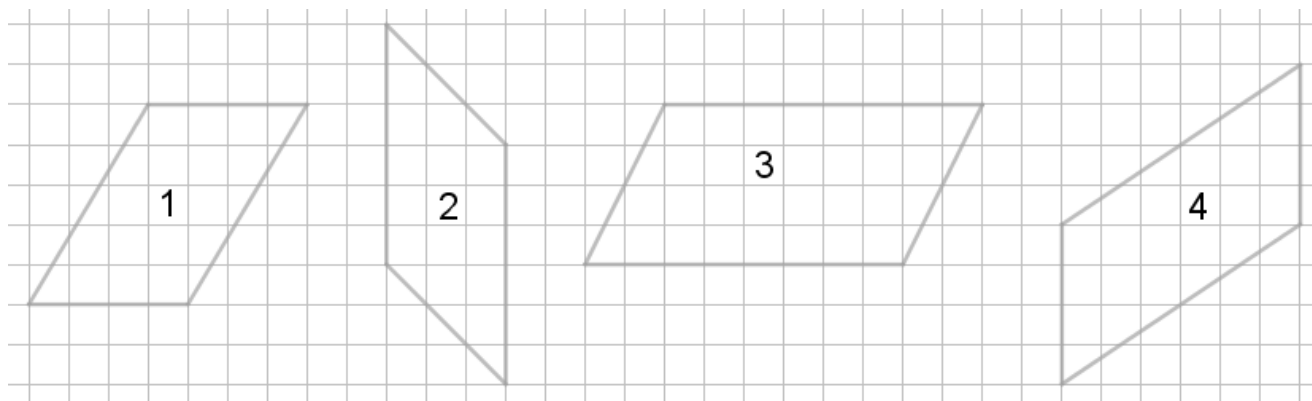
ALORS, c'est un parallélogramme.

4. Démontrer qu'un quadrilatère est un ... :



5^{ème} - Exercices sur le chapitre 14 :

Exercice n°1 :



On considère que le quadrillage ci-dessous est composé de carrés de 1 cm de côté.

1. Pour chaque parallélogramme :

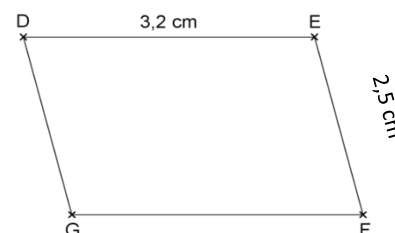
- Tracer au crayon de papier une hauteur dont vous pouvez donner la longueur exacte grâce au quadrillage (ne pas oublier le codage).
- Repasser en bleu une base associée à cette hauteur.

2. Remplir le tableau situé sur la page suivante en utilisant la question précédente.

Numéro de la figure	Longueur de la hauteur	Longueur de la base	Aire du parallélogramme (écrire le calcul et le résultat)
1			
2			
3			
4			

Exercice n°2 :

$DEFG$ est un parallélogramme.



1. Que peut-on dire des droites (DG) et (EF) ? Justifier.

.....

.....

2. Quelle est la longueur du segment $[DG]$? Justifier.

• 1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé

.....

.....

.....

• 2^{ème} étape : Je cite le cours

.....

.....

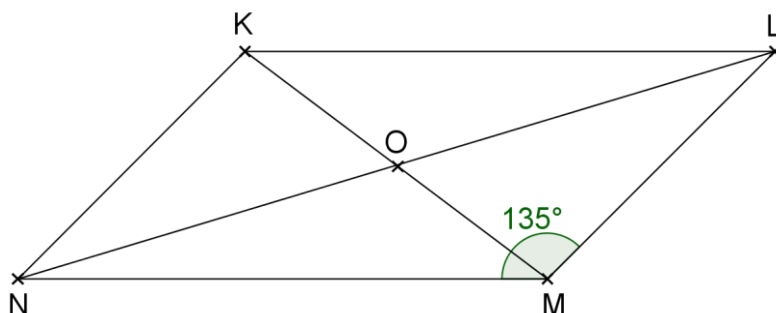
• 3^{ème} étape : Je conclus à la question

.....

Exercice n°3 : (à rédiger sur feuille en 3 étapes pour chaque question)

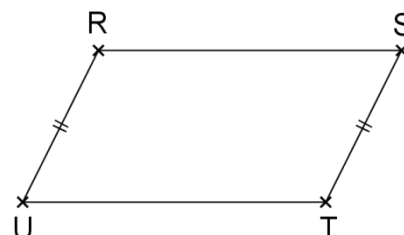
$KLMN$ est un parallélogramme de centre O tel que $NO = 5\text{ cm}$, $KO = 3\text{ cm}$, $KN = 4\text{ cm}$

1. Quelle est la longueur du segment $[OL]$? Justifier.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{LKN}$? Justifier.



Exercice n°4 :

$RSTU$ est un quadrilatère et on suppose que (RU) et (ST) sont parallèles.



Démontrer sur la page suivante que $RSTU$ est un parallélogramme.

• 1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé

.....

.....

.....

• 2^{ème} étape : Je cite le cours

.....

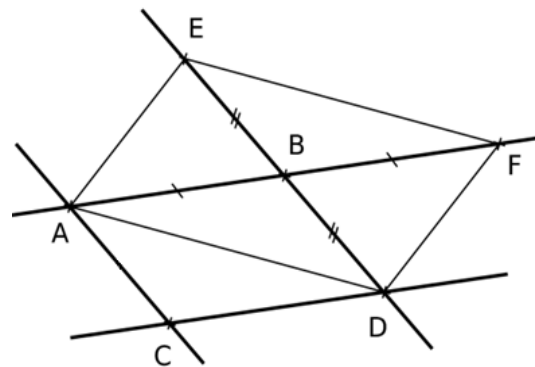
.....

• 3^{ème} étape : Je conclus à la question

.....

Exercice n°5 :

Les droites tracées en épais sont parallèles.



1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

.....

.....

.....

2. Démontrer que $ADFE$ est un parallélogramme.

- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé**

.....

.....

.....

- **2^{ème} étape : Je cite le cours**

.....

.....

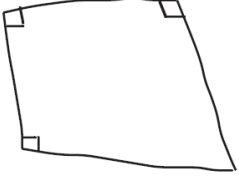
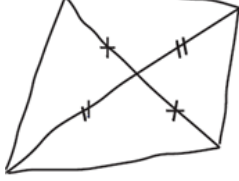
- **3^{ème} étape : Je conclus à la question**

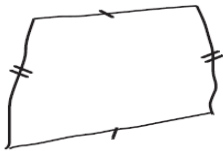
.....

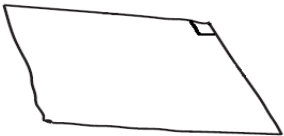
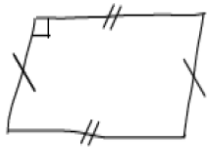
Exercice n°6 :

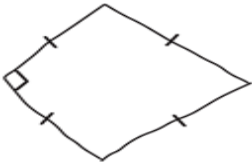
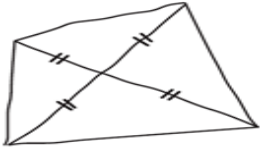
Voici un schéma à main levée de onze quadrilatères.

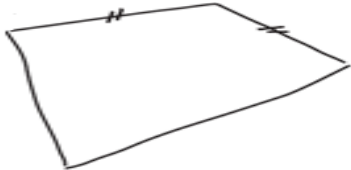
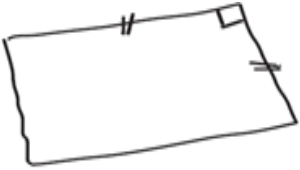
Prendre le schéma bilan de la page précédente et compléter le tableau ci-dessous en indiquant la nature de chaque quadrilatère et le numéro des bulles du schéma bilan que vous avez utilisées pour trouver la réponse.

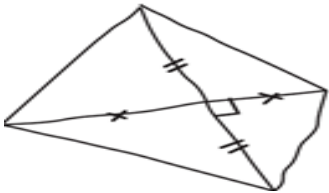
n°1 	n°2 
nature :	nature :
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :

n°3 	n°4 
nature :	nature :
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :

n°5 <i>Ce quadrilatère est un parallélogramme.</i> 	n°6 
nature :	nature :
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :

n°7 	n°8 
nature :	nature :
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :

n°9 <i>Ce quadrilatère est un parallélogramme.</i> 	n°10 <i>Ce quadrilatère est un parallélogramme.</i> 
nature :	nature :
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :

n°11 	
nature :	
bulle(s) du schéma bilan utilisée(s) :	

Construction d'un parallélogramme

Ex n°2 p.113 du sesamath
Ex n°7 p.114 du sesamath

Ex n°4 p.113 du sesamath
Ex n°6.b p.114 du sesamath

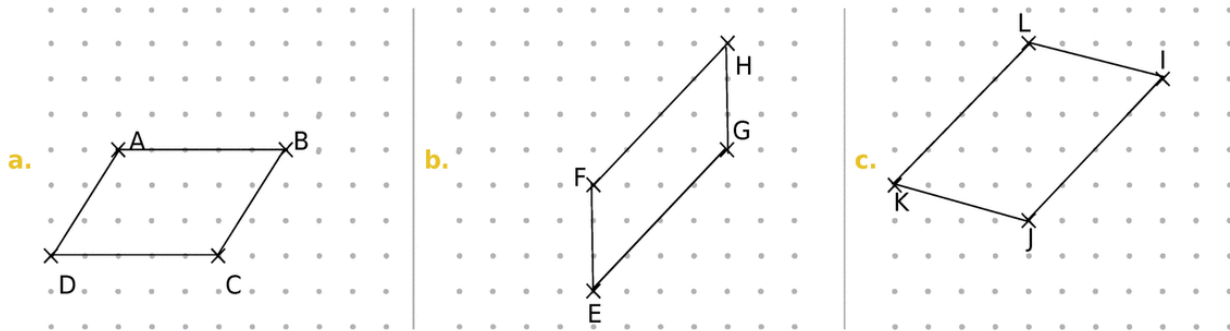
Construction d'un carré, d'un rectangle, d'un losange

Ex n°3 a-c-e p.115 du sesamath
Ex n°5 p.116 du sesamath
Ex n°4.b p.116 du sesamath

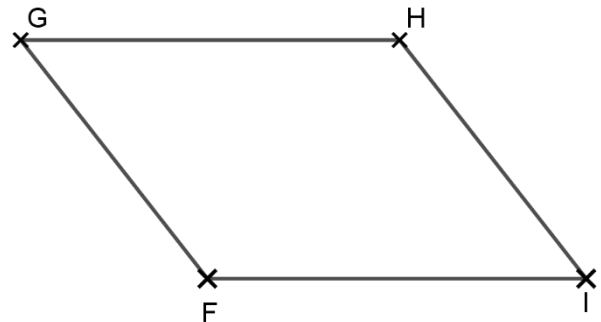
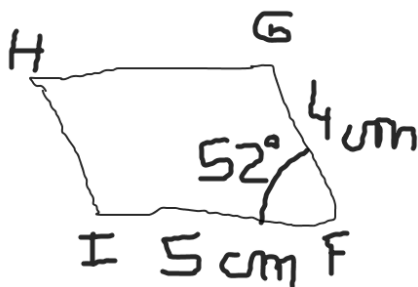
Ex n°3 b-d-f p.115 du sesamath
Ex n°4.a p.116 du sesamath
Ex n°6 p.116 du sesamath

5^{ème} – Exercices sur le chapitre 14 : Colonne de gauche (corrigés)

Ex n°2 p.113 du sesamath (corrigé) :



Ex n°7 p.114 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :

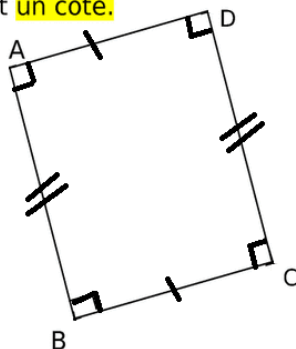


Ex n°3 a-c-e p.115 du sesamath (corrigé) :

ATTENTION, les figures ci-dessous ne sont pas en vraie grandeur.

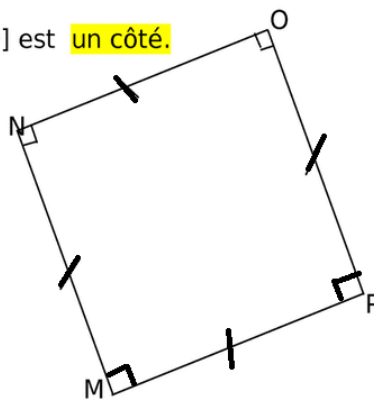
a. le rectangle ABCD tel que $BC = 3 \text{ cm}$;

[BC] est un côté.



c. le carré MNOP ;

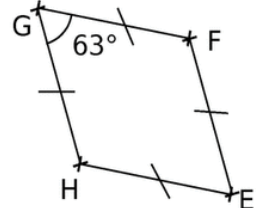
[NO] est un côté.



e. le losange EFGH tel que

$\widehat{HGF} = 63^\circ$;

[GH] est un côté



Ex n°5 p.116 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :

On a :

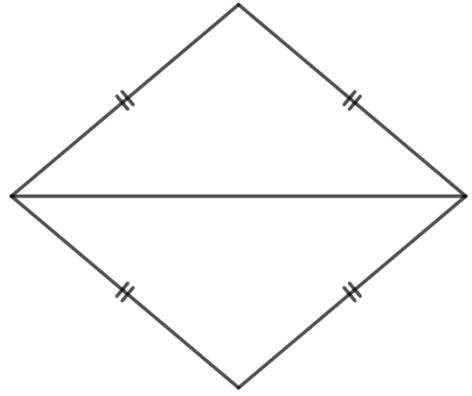
$$P = 2 \times L + 2 \times l$$

$$20 \text{ cm} = 2 \times L + 7 \text{ cm}$$

$$\text{Donc } L = (20 \text{ cm} - 7 \text{ cm}) \div 2 = 6,5 \text{ cm}$$



Ex n°4.b p.116 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :

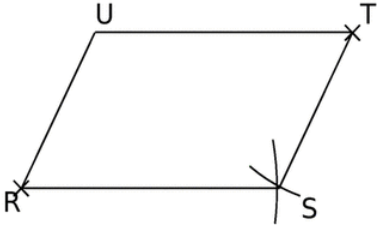


5^{ème} – Exercices sur le chapitre 14 : Colonne de droite (corrigés)

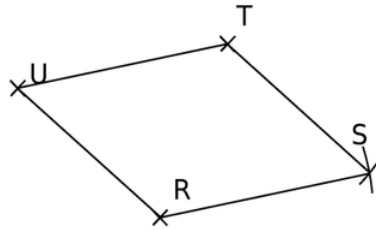
Ex n°4 p.113 du sesamath (corrigé) :

ATTENTION, les figures ci-dessous ne sont pas en vraie grandeur.

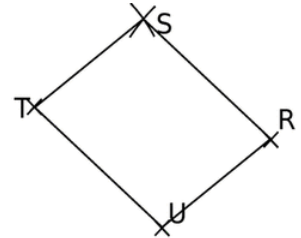
a.



b.

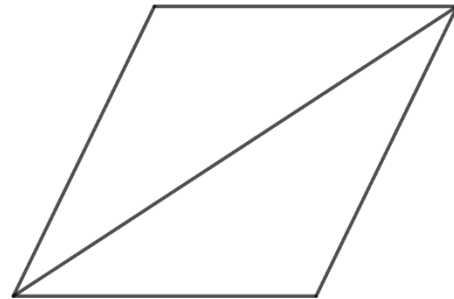
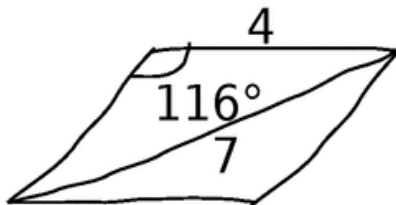


c.



Ex n°6.b p.114 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :

b.



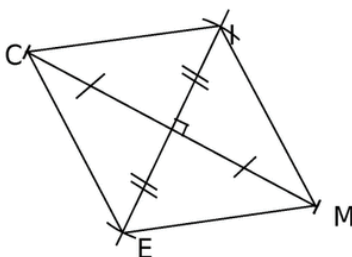
Ex n°3 b-d-f p.115 du sesamath (corrigé) :

ATTENTION, les figures ci-dessous ne sont pas en vraie grandeur.

b. le losange CIME tel que
 $IE = 3 \text{ cm}$;

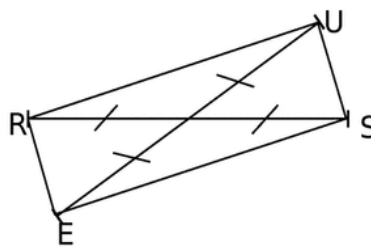
CM] est une diagonale.

[IE] est une diagonale.



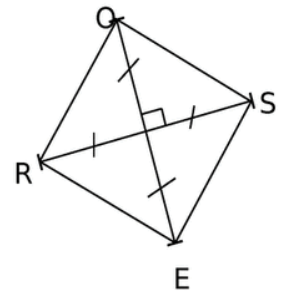
d. un rectangle RUSE ;

[RS] est une diagonale.

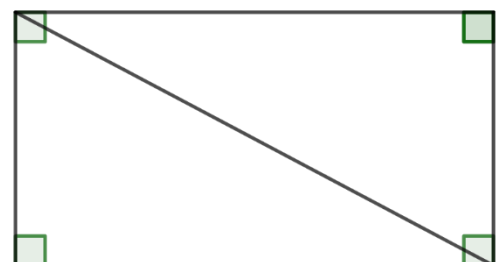
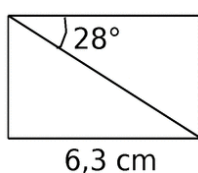


f. le carré ROSE.

[OE] est une diagonale.

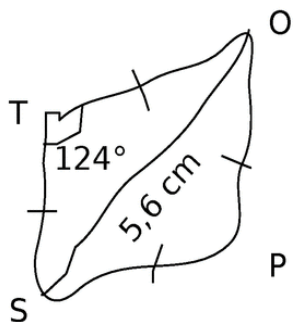


Ex n°4.a p.116 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :



Ex n°6 p.116 du sesamath (corrigé en vraie grandeur) :

a.



b. Je calcule la mesure de l'angle $\widehat{OST}$.

- **1^{ère} étape : Je dis ce que je sais d'après l'énoncé.**

Je sais que :

- Le triangle STO est isocèle en T (car $STOP$ est un losange)
- $\widehat{STO} = 124^\circ$

- **2^{ème} étape : Je cite le cours.**

Or, si un triangle est isocèle, alors les angles de la base ont la même mesure.

- **3^{ème} étape : Je conclus.**

J'en déduis que : $\widehat{OST} = (180^\circ - 124^\circ) \div 2 = 28^\circ$

c.

